Mathematica - Revista eletrônica de divulgação matemática.
V. 1 (2021) - pp. 9 - 22

Uma demonstração da desigualdade isoperimétrica utilizando a desigualdade de Brunn-Minkowski

Felipe Costa - Universidade Estadual do Oeste do Paraná

(*Recebido em 23/11/2021. Aceito em 03/12/2021. Publicado em 22/12/2021*)

Resumo: Neste trabalho apresentamos uma demonstração da desigualdade isoperimétrica fazendo uso da desigualdade de Brunn-Minkowski. A vantagem desta abordagem é a sua extensão natural ao caso tridimensional, além de servir como um exemplo de aplicação do Cálculo Variacional no estudo de problemas geométricos.

Palavras-chave: Curvas planas; Desigualdade de Brunn-Minkowski; Desigualdade isoperimétrica.

1 Introdução

Para introduzir a desigualdade isoperimétrica vamos pensar em uma curva Γ como a trajetória contínua descrita por uma partícula no plano. Dizemos que Γ é uma curva fechada se o ponto inicial e o ponto final da trajetória são iguais. Neste caso, vamos denotar por Ω a região delimitada pela curva Γ.

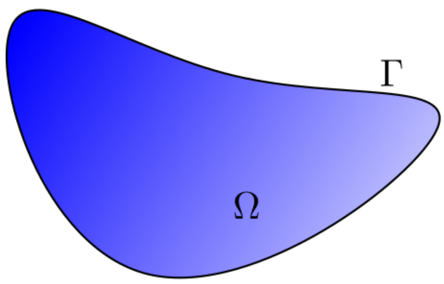

Figura 1: A curva Γ delimita a região Ω

A desigualdade isoperimétrica surge como uma consequência do

Problema isoperimétrico, que consiste em obter, dentre todas as curvas fechadas, sem autointerseções e de comprimento fixo, aquela que delimita a região de maior área.

Este é um dos problemas mais famosos e antigos da geometria, tendo como origem o mito da fundação de Cartago (veja VIRGÍLIO ou BLÅSJÖ).

Os Gregos já sabiam que a solução do problema isoperimétrico era uma circunferência. Mas foi somente em 1879, com K. Weierstrass, que uma demonstração suficientemente satisfatória foi apresentada. Na verdade, o resultado segue como uma consequência da teoria desenvolvida por Weierstrass denominada Cálculo das Variações, onde o problema isoperimétrico é um dos problemas típicos abordados por esta teoria.

Dada uma curva fechada Γ em $\mathbb{R}^2$ delimitando uma região Ω, vamos denotar por $L(\Gamma)$ o comprimento desta curva e por $A(\Omega)$ a área da região delimitada pela mesma. Se sabemos a priori que uma solução do problema isoperimétrico é uma circunferência $\mathcal{C}$, então qualquer outra curva fechada Γ com comprimento $L(\Gamma) = L(\mathcal{C})$ deve delimitar uma área $A(\Omega) \leq A(\mathcal{C})$. Suponhamos que o raio da circunferência $\mathcal{C}$ seja igual a r, com isso podemos escrever

$$A(\Omega) \leq A(\mathcal{C}) = \pi r^2 = \frac{(2\pi r)^2}{4\pi} = \frac{L(\mathcal{C})^2}{4\pi} = \frac{L(\Gamma)^2}{4\pi},$$

ou seja,

$$A(\Omega) \leq \frac{L(\Gamma)^2}{4\pi}. \tag{1}$$

A desigualdade (1) é denominada desigualdade isoperimétrica. Observe que (1) foi obtida a partir da hipótese de que a circunferência é uma solução do problema isoperimétrico, o que, por enquanto, torna esta desigualdade apenas uma conjectura.

Por outro lado, caso provemos a desigualdade (1) para toda curvar fechada Γ delimitando uma região Ω, então a circunferência seria uma solução do problema isoperimétrico, pois $L(\Gamma)^2/4\pi$ seria uma cota superior para todas as áreas de regiões delimitadas por curvas curvas fechadas de comprimento $L(\Gamma)$ fixado, a qual é atingida quando Γ é uma circunferência de raio $L(\Gamma)/2\pi$. Isto responderia uma parte do problema isoperimétrico, restando apenas provar que a circunferência é a única curva plana com esta propriedade.

Teorema 1 (Desigualdade isoperimétrica)**.** *Seja Γ uma curva fechada, sem autointerseções, de comprimento $L(\Gamma)$ e delimitando uma região Ω. Se $A(\Omega)$ é a área de Ω, então*

$$L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) \geq 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Γ é uma circunferência.

Para provar o Teorema 1, além das fórmulas de primeira variação do comprimento e da área, obtidas na Seção 3, vamos utilizar um resultado conhecido como Desigualdade de Brunn-Minkowski que trata sobre a área da soma de subconjuntos do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Evidentemente, estamos interessados no caso $n = 2$, mas vale ressaltar que a mesma desigualdade no caso $n = 3$ pode ser usada para estender a desigualdade isoperimétrica para o contexto de superfícies (veja MONTIEL e ROS).

Dados A e B dois subconjuntos quaisquer de $\mathbb{R}^n$, o conjunto soma $A + B$ é definido por

$$A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\}.$$

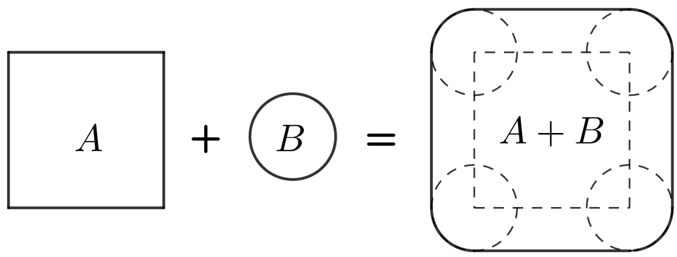

Figura 2: Soma do quadrado A com o círculo B

Queremos somar subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que tenham áreas bem definidas. Estes conjuntos são chamados conjuntos Lebesgue mensuráveis, ou simplesmente conjuntos mensuráveis.

A Desigualdade de Brunn-Minkowski que será enunciada adiante é válida no contexto de conjuntos mensuráveis, mas, para os nossos propósitos, será suficiente considerar apenas subconjuntos abertos, visto que, todo aberto de $\mathbb{R}^n$ é (Lesbegue) mensurável (veja STEIN e SHAKARCHI).

Teorema 2 (Desigualdade de Brunn-Minkowski)**.** *Sejam Ω_1 e Ω_2 dois subconjuntos abertos e limitados de $\mathbb{R}^n$. Então*

$$A(\Omega_1)^{1/n} + A(\Omega_2)^{1/n} \leq A(\Omega_1 + \Omega_2)^{1/n}.$$

A demonstração do Teorema 2 pode ser encontrada em STEIN e SHAKARCHI.

Observe que está implícito na conclusão do Teorema 2 que soma de dois subconjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável. Na verdade, é possível mostrar se A ou B é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, então $A + B$ é um conjunto aberto. Assim, de acordo com o que foi destacado acima, $A + B$ é um conjunto mensurável.

Para utilizar o Teorema 2 em conjunto com as fórmulas de variação do comprimento e da área precisamos restringir a classe de curvas que estamos considerando, isto é, devemos considerar curvas de classe C^2. Esta restrição deve-se ao fato de que a nossa abordagem passa pelo conceito de curvatura de uma curva. Além disso, queremos variar a curva Γ dentro de um conjunto aberto $N_\varepsilon(\Gamma)$ de modo que as curvas da variação ainda sejam fechadas, sem autointerseções e de classe C^2. O conjunto aberto $N_\varepsilon(\Gamma)$ é chamado vizinhança tubular da curva Γ e pode ser pensado como uma faixa de largura 2ε ao longo de Γ. A construção de $N_\varepsilon(\Gamma)$ pode ser encontrada em ALENCAR, et al.

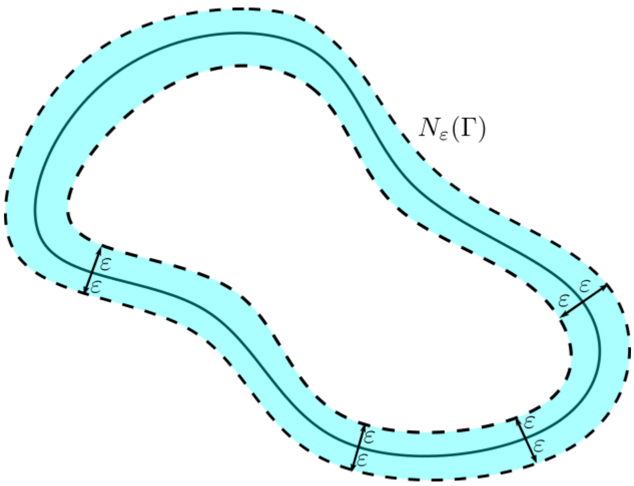

Figura 3: Vizinhança tubular

A parte da igualdade no Teorema 1 será demonstrada observando que as curvas planas fechadas de classe C^2 que satisfazem $L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) = 0$ são aquelas que têm curvatura constante não nula. Esta informação caracteriza as circunferências.

2 Curvas em $\mathbb{R}^2$

Uma curva plana parametriza é uma aplicação contínua $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. A curva α será denominada de classe C^k se as funções coordenadas $x, y : I \to \mathbb{R}$ são de classe C^k.

O conjunto imagem da aplicação α, definido por

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in I\}$$

é chamado traço da curva α. Neste caso, dizemos que α é uma parametrização de Γ.

Exemplo 1. Dado $r > 0$, a curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$$

tem como traço uma circunferência de raio r e centro na origem.

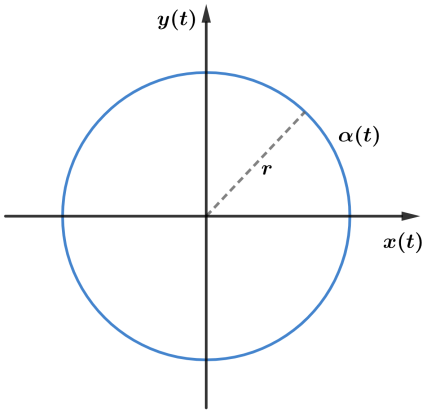

Figura 4: Circunferência de raio r e centro na origem

O próximo exemplo mostra que uma curva no plano pode ter autointerseções.

Exemplo 2. Considere a curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4).$$

O traço da curva α possui uma autointerseção na origem pois $\alpha(-2) = \alpha(2) = (0, 0)$.

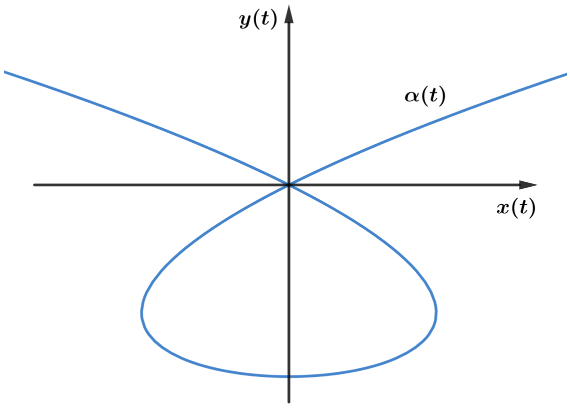

Figura 5: Traço da curva definida por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$

Se uma curva α está definida em um intervalo fechado $I = [a, b]$, os pontos $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ são chamados ponto inicial e ponto final de α, respectivamente. A curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é dita fechada se $\alpha(a) = \alpha(b)$. Note a curva apresentada no exemplo 1 é fechada já que $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$.

Dizemos que uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é simples se a aplicação α é injetora. Observe que a curva apresentada no exemplo 2 não é simples pois $\alpha(-2) = \alpha(2)$.

Neste trabalho estamos particularmente interessados em curvas planas que reunem as duas últimas propriedades acima. Precisamente, uma curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é dita fechada e simples se $\alpha(a) = \alpha(b)$ e a restrição de α ao intervalo $[a, b)$ é injetora. Uma curva fechada e simples é também denominada curva de Jordan.

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada dada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. O vetor tangente de α em $t_0 \in I$ é definido por

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Quando $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$, dizemos que a curva α é regular. Portanto, ao longo do traço de uma curva regular fica bem definida uma reta tangente em cada ponto $\alpha(t)$ na direção do vetor $\alpha'(t)$. Se $\alpha'(t_0) = (0, 0)$, então dizemos que α tem um ponto singular em t_0.

De agora em diante, iremos considerar apenas curvas regulares de classe C^k, com $k \geq 2$, definidas em intervalos fechados e limitados, ficando assim assumida tacitamente estas hipóteses no decorrer deste texto.

O comprimento de uma curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é, por definição,

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt,$$

onde

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Observe que se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$, então $L(\alpha) = b - a$, ou seja, o comprimento da curva é igual ao comprimento do intervalo $[a, b]$. Por outro lado, se

$$\int_a^t \|\alpha'(s)\| ds = t - a, \quad \text{para todo} \quad t \in [a, b],$$

então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in [a, b]$.

Dizemos que a curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para todo $t \in I$. Uma propriedade muito importante envolvendo as curvas regulares e a parametrização pelo comprimento de arco é dada pela seguinte

Proposição 3. *Dada uma curva regular $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$. Existe uma curva regular $\beta : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ com o mesmo traço da curva α e que satisfaz $\|\beta'(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, l]$.*

A proposição 3 garante que sempre é possível reparametrizar o traço de uma curva regular pelo comprimento de arco, consequentemente, o vetor tangente desta nova parametrização é unitário em todo ponto.

Exemplo 3. A curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada no exemplo 1 é regular, mas não está parametrizada pelo comprimento de arco para todo valor de $r \neq 1$ pois

$$\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(-r\,\text{sen}(t))^2 + (r\cos(t))^2} = r.$$

Por outro lado, é simples verificar que a curva $\beta : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\beta(t) = (r\cos(t/r), r\,\text{sen}(t/r))$$

possui o mesmo traço da curva α (é uma circunferência de raio r e centro na origem) e está parametrizada pelo comprimento de arco, independentemente do valor de $r > 0$.

Quando a curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ estiver parametrizada pelo comprimento de arco, denotaremos o vetor tangente (unitário) desta curva no ponto $t \in I$ por $T(t)$, ou seja,

$$T(t) = (x'(t), y'(t)).$$

A partir do vetor tangente $T(t)$, podemos definir o vetor normal (unitário) $N(t)$ da curva α no ponto $t \in I$ da seguinte maneira

$$N(t) = (-y'(t), x'(t)).$$

Observe que o vetor normal $N(t)$ é obtido através da rotação do vetor $T(t)$ por uma ângulo de $90°$ no sentido anti-horário, assim, para cada $t \in I$, o conjunto $\{T(t), N(t)\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^2$ denominada referencial de Frenet de α.

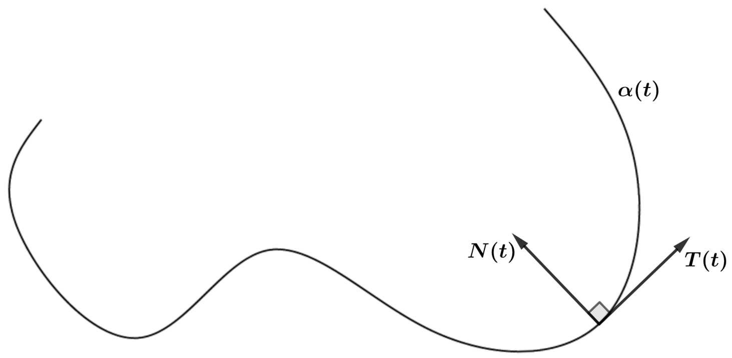

Figura 6: Referencial de Frenet de α

Estamos quase prontos para definir a função curvatura de uma curva no plano, restando apenas estabelecer o seguinte resultado:

Proposição 4. *Se uma função $X : I \to \mathbb{R}^2$ é diferenciável e $\|X\| : I \to \mathbb{R}$ é uma função constante, então $X'(t) \perp X(t)$ para todo $t \in I$.*

Prova. Derivando a equação $\|X(t)\|^2 = constante$, obtemos

$$0 = \frac{d}{dt}(X(t) \cdot X(t)) = X'(t) \cdot X(t) + X(t) \cdot X'(t) = 2X'(t) \cdot X(t).$$

Segue que $X'(t) \cdot X(t) = 0$ e, consequentemente, $X'(t) \perp X(t)$. $\square$

Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^k, $k \geq 2$, parametrizada pelo comprimento de arco. Por definição, a função vetor tangente unitário $T : I \to \mathbb{R}^2$ satisfaz as hipóteses da Proposição 4. Assim, podemos concluir que $T'(t) \perp T(t)$ para todo $t \in I$. Este fato e a definição do vetor normal $N(t)$ garantem a existência de uma função $\kappa : I \to \mathbb{R}$, tal que

$$T'(t) = \kappa(t)N(t) \quad \text{para todo} \quad t \in I. \tag{2}$$

Definição 5. A função $\kappa : I \to \mathbb{R}$, definida pela equação (2), é denominada função curvatura da curva α. Dizemos que $\kappa(t)$ é a curvatura de α no ponto $t \in I$.

Segue da equação (2) que a curvatura de α em $t \in I$ mede a variação do vetor tangente neste ponto, visto que

$$\|T'(t)\| = |\kappa(t)|.$$

Antes de prosseguirmos, deixemos registrado o seguinte par de equações, válidas para toda curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, conhecidas como Equações de Frenet de α:

$$\begin{cases} T'(t) = \kappa(t)N(t) \\ N'(t) = -\kappa(t)T(t) \end{cases} \quad \text{para todo} \quad t \in I.$$

A primeira das Equações de Frenet é simplesmente a definição da função curvatura e a segunda equação segue da Proposição 4 aplicada à função vetor normal $N : I \to \mathbb{R}^2$ da curva α e do fato de $\{T(t), N(t)\}$, $t \in I$, formar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ (a definição e os principais resultados sobre bases ortonormais em $\mathbb{R}^n$ podem ser encontrados em ANTON e RORRES). Os detalhes sobre a dedução das Equações de Frenet podem ser encontrados em TENENBLAT.

Em relação ao traço da curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, podemos interpretar a curvatura como a medida do quanto uma curva deixa de ser uma reta. Esta interpretação pode ser justificada pelo seguinte resultado:

Proposição 6. *A função curvatura de uma curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ é identicamente nula se, e somente se, o traço de α está contido em uma reta.*

Prova. Se a função curvatura da curva α é identicamente nula, então $T'(t) = (0,0)$ para todo $t \in I$. Como I é um intervalo, concluímos que a função vetor tangente $\alpha'(t)$ é constante, digamos, $\alpha'(t) = \alpha'(t_0) = v$ para todo $t \in I$, onde $t_0 \in I$ é um ponto fixado. Escolhendo arbitrariamente $t_1 \in I$, podemos escrever

$$\alpha(t) - \alpha(t_1) = \int_{t_1}^{t} \alpha'(t)dt = \int_{t_1}^{t} vdt = (t - t_1)v,$$

ou melhor,

$$\alpha(t) = \alpha(t_1) + (t - t_1)v.$$

Mostramos assim que o traço de α está contido na reta que passa pelo ponto $\alpha(t_1)$ na direção do vetor v.

Por outro lado, se o traço da curva α está contido em um reta e α está parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\alpha(t) = P_0 + tv \quad \text{para todo} \quad t \in I,$$

onde $P_0 \in \mathbb{R}^2$ é um ponto da reta e $v \in \mathbb{R}^2$ é um vetor diretor unitário desta reta. Daí, para cada $t \in I$, podemos escrever

$$\kappa(t)N(t) = T'(t) = \alpha''(t) = (0,0).$$

Como o vetor $N(t)$ é unitário, concluímos que $\kappa(t) = 0$ para todo $t \in I$. □

Outro fato intuitivo que pode ser confirmado a partir do conceito de curvatura é a impressão de que uma circunferência parece "se curvar" de igual modo em cada um de seus pontos. A tradução matemática desta observação é que a função curvatura de uma circunferência é constante e não nula. Tanto esta afirmação quanto a sua recíproca (se a curvatura de uma curva de Jordan é constante e não nula, então esta curva é uma circunferência) podem ser provadas, e serão de grande importância neste texto, pois, como veremos, as curvas de Jordan de comprimento fixo e que delimitam a maior área possível são aquelas que têm curvatura constante. Portanto, faz-se necessário registrar a seguinte

Proposição 7. *Uma curva de Jordan $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ tem curvatura constante igual a $k_0 \neq 0$ se, e somente se, o traço de α é uma circunferência de raio $r = 1/\kappa_0$.*

Utilizando a parametrização $\beta(t) = (r\cos(t/r), r\,\mathrm{sen}(t/r))$, dada no exemplo 3, podemos calcular facilmente a curvatura da circunferência de raio r já que, neste caso,

$$T'(t) = \beta''(t) = -\frac{1}{r}\beta(t) = \frac{1}{r}N(t).$$

Segue da equação (2) que $\kappa(t) = 1/r$ para todo $t \in [0, 2\pi r]$. A demonstração completa da proposição 7 pode ser encontrada em TENENBLAT.

Vamos finalizar esta seção enunciando um resultado que é uma consequência do Teorema de Green. Este resultado será usado para calcular a área delimitada por uma curva de Jordan. Mas antes disso, convém lembrar que uma curva de Jordan $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ está positivamente orientada se, para cada $t \in I$, o vetor normal $N(t)$ aponta para a região delimitada por α.

Lema 8. *Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma curva de Jordan positivamente orientada e definida por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então a área da região Ω, delimitada pela curva α, é dada por*

$$A(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt.$$

É importante observar que no lema 8 a curva α não precisa estar parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso, denotando por $\alpha'(t)^{\perp}$ a rotação do vetor tangente de α no ponto $t \in I$ por um ângulo de $90°$ no sentido positivo (note que $T^{\perp} = N$), a fórmula que fornece a área da região Ω, delimitada por α, pode ser reescrita na forma

$$A(\Omega) = -\frac{1}{2}\int_a^b \alpha(t)\cdot\alpha'(t)^{\perp}dt.$$

3 Fórmulas de variação do comprimento e da área

Ao longo desta seção, $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ será uma curva de Jordan de classe C^k, $k \geq 2$, parametrizada pelo comprimento arco. Além disso, denotaremos por Γ o traço de α.

Dada uma função diferenciável $f : [0, l] \to \mathbb{R}$, podemos encontrar um número $\delta > 0$ tal que, se $|t| < \delta$, então $tf([0, l]) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$ é escolhido de modo que $N_\varepsilon(\Gamma)$ seja uma vizinhança tubular de Γ. Suponhamos que a função f satisfaz $f(0) = f(l)$.

Uma variação da curva $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ correspondente à função diferenciável $f : [0, l] \to \mathbb{R}$ é uma família de curvas dada por

$$\Gamma_t(f) = \{\alpha_f : [0, l] \to \mathbb{R}^2 : \alpha_f(s) = \alpha(s) - tf(s)N(s)\}.$$

Observe que $\Gamma_0(f) = \alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ para toda função f e que $\Gamma_t(1)$ é uma família de curvas paralelas à curva α para todo $t \in (-\delta, \delta)$.

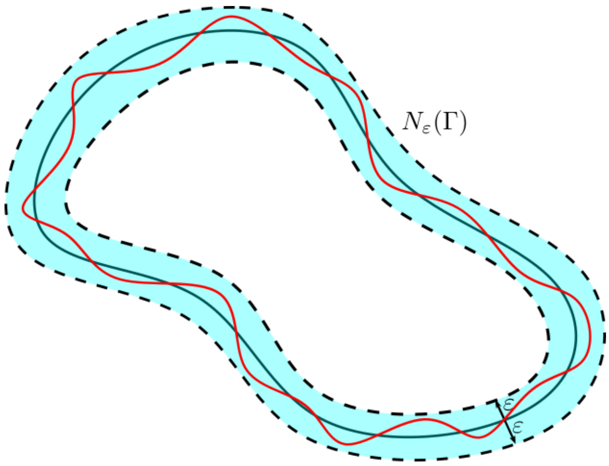

Figura 7: Variação da curva α

Lema 9 (Primeira variação do comprimento)**.** *Seja $\Gamma_t(f)$, $|t| < \delta$, para algum $\delta > 0$, uma variação da curva de Jordan $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ correspondente à função $f : [0, l] \to \mathbb{R}$. Então a função $L : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$t \in (-\delta, \delta) \longmapsto L(t) = L(\Gamma_t(f))$$

é diferenciável e satisfaz

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(\Gamma_t(f)) = \int_0^l \kappa(s) f(s) ds.$$

Prova. Dada uma curva $\alpha_f \in \Gamma_t(f)$, temos

$$\alpha_f(s) = \alpha(s) - tf(s)N(s).$$

Derivando em relação a s encontramos

$$\alpha'_f(s) = T(s) - tf'(s)N(s) - tf(s)N'(s).$$

Usando as equações de Frenet ficamos com

$$\alpha'_f(s) = (1 + tf(s)\kappa(s))T(s) - tf'(s)N(s). \tag{3}$$

Como o conjunto $\{T(s), N(s)\}$ forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, temos

$$\|\alpha'_f(s)\|^2 = (1 + tf(s)\kappa(s))^2 + (tf'(s))^2.$$

Observe que, apesar de a curva $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ estar parametrizada pelo comprimento de arco, o mesmo não precisa ocorrer com as curvas α_f da variação de α. De todo modo, podemos escrever

$$L(\Gamma_t(f)) = \int_0^l \|\alpha'_f(s)\| ds = \int_0^l \sqrt{(1 + tf(s)\kappa(s))^2 + (tf'(s))^2} ds.$$

Finalmente, derivando sob o sinal de integração e fazendo $t = 0$, concluímos que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(\Gamma_t(f)) = \int_0^l \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sqrt{(1 + tf(s)\kappa(s))^2 + (tf'(s))^2} ds = \int_0^l \kappa(s) f(s) ds.$$

$\square$

Lema 10 (Primeira variação da área)**.** *Para cada $t \in (-\delta, \delta)$, seja $\Omega_t(f)$ a região delimitada pela curva de Jordan $\alpha_f \in \Gamma_t(f)$. Então a função $A : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$t \in (-\delta, \delta) \longmapsto A(t) = A(\Omega_t(f))$$

é diferenciável e satisfaz

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(\Omega_t(f)) = \int_0^l f(s)ds.$$

Prova. Dada uma curva $\alpha_f \in \Gamma_t(f)$, o lema 8 nos diz que

$$A(\Omega_t(f)) = -\frac{1}{2}\int_0^l \alpha_f(s) \cdot \alpha_f'(s)^{\perp} dt.$$

Utilizando a equação (3) e as definições de T e N encontramos

$$\alpha_f'(s)^{\perp} = (1 + tf(s)\kappa(s))N(s) + tf'(s)T(s).$$

Efetuando a operação $\alpha_f(s) \cdot \alpha_f'(s)^{\perp}$ obtemos

$$\alpha_f(s) \cdot \alpha_f'(s)^{\perp} = (1 + tf(s)\kappa(s))\alpha(s) \cdot N(s) - tf(s)(1 + tf(s)) + tf'(s)\alpha(s) \cdot T(s).$$

Derivando a expressão acima em relação a t, fazendo $t = 0$ e usando as equações de Frenet, obtemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_f(s) \cdot \alpha_f'(s)^{\perp} = \alpha(s) \cdot (f(s)T(s))' - f(s).$$

Usando a identidade $[\alpha(s) \cdot (f(s)T(s))]' = f(s) + \alpha(s) \cdot (f(s)T(s))'$ podemos escrever

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_f(s) \cdot \alpha_f'(s)^{\perp} = [\alpha(s) \cdot (f(s)T(s))]' - 2f(s).$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(\Omega_t(f)) &= -\frac{1}{2}\int_0^l \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \alpha_f(s) \cdot \alpha_f'(s)^{\perp} dt \\ &= -\frac{1}{2}\alpha(s) \cdot (f(s)T(s))\Big|_0^l + \int_0^l f(s)ds \\ &= \int_0^l f(s)ds. \end{aligned}$$

Na última linha usamos a condição $f(0) = f(l)$ e o fato de α ser uma curva de Jordan regular.

□

4 Demonstração da desigualdade isoperimétrica

Nesta seção vamos demonstrar a desigualdade isoperimétrica. Aqui faz-se necessário enunciar o Teorema isoperimétrico no contexto de curvas regulares de classe C^2.

Teorema 11 (Desigualdade isoperimétrica)**.** *Seja* Γ *o traço de uma curva de Jordan regular de classe* C^2*, comprimento* $L(\Gamma)$ *e delimitando uma região* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*. Se* $A(\Omega)$ *é a área de* Ω*, então*

$$L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) \geq 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Γ *é uma circunferência.*

Prova. Suponhamos que a curva $\alpha : [0, l] \to \mathbb{R}^2$ cujo traço é igual a Γ está parametrizada pelo comprimento de arco. A demonstração será dividida em duas partes:

(i) Para $t > 0$ suficientemente pequeno considere a variação $\Gamma_t(1)$ da curva α correspondente à função $f \equiv 1$. Por simplicidade, denotemos por Ω_t a região delimitada pelas curvas da variação $\Gamma_t(1)$. Deste modo, se D_t é um disco aberto de raio t e centrado na origem, temos

$$\Omega_t \supset \Omega + D_t.$$

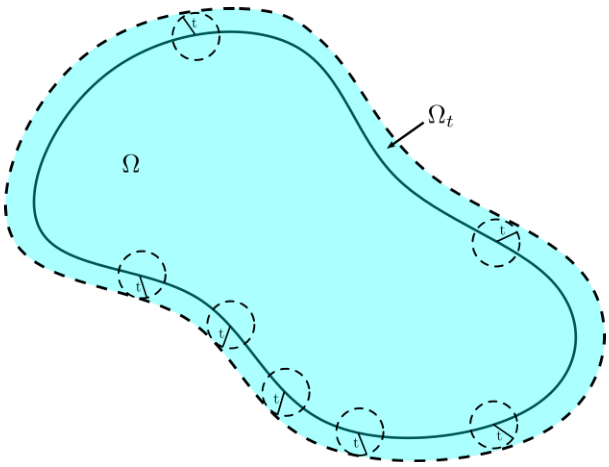

Figura 8: Conjunto $\Omega + D_t$

Da relação $A(\Omega_t) \geq A(\Omega + D_t)$ e da desigualdade de Brunn-Minkowski (Teorema 2) concluímos que

$$\begin{aligned} A(\Omega_t) &\geq A(\Omega + D_t) \\ &\geq [A(\Omega)^{1/2} + A(D_t)^{1/2}]^2 \\ &= A(\Omega) + 2A(\Omega)^{1/2}A(D_t)^{1/2} + A(D_t) \\ &= A(\Omega) + 2tA(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi} + \pi t^2 \\ &> A(\Omega) + 2tA(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

como $t > 0$,

$$\frac{A(\Omega_t) - A(\Omega)}{t} > 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}.$$

Fazendo $t \to 0^+$ encontramos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(\Omega_t) \geq 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}.$$

Usando a fórmula de primeira variação da área (Lema 10) podemos escrever

$$\int_0^l f(s)ds \geq 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}.$$

Por outro lado, estamos supondo $f \equiv 1$ e $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja, $l = L(\Gamma)$. Segue que

$$L(\Gamma) \geq 2A(\Omega)^{1/2}\sqrt{\pi}$$

e assim,

$$L(\Gamma)^2 \geq 4\pi A(\Omega).$$

(ii) Se S_r é uma circunferência de raio r, então

$$L(S_r)^2 = 4\pi^2 r^2 = 4\pi A(D_r),$$

isto é,

$$L(S_r)^2 - 4\pi A(D_r) = 0.$$

Portanto, a igualdade na desigualdade isoperimétrica ocorre quando Γ é uma circunferência de raio arbitrário.

Suponhamos agora que Γ satisfaz

$$L(\Gamma)^2 - 4\pi A(\Omega) = 0.$$

Dada uma função diferenciável $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(l)$, considere a variação $\Gamma_t(f)$ da curva $\alpha : [0,l] \to \mathbb{R}^2$ (parametrização de Γ) correspondente à função f, onde $|t| < \delta$ para algum $\delta > 0$. Então, a função $h : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(t) = L(\Gamma_t(f))^2 - 4\pi A(\Omega_t(f)),$$

é diferenciável pelos Lemas 9 e 10 e atinge o seu valor mínimo no ponto $t = 0$ pois $h(t) \geq 0$ pela primeira parte da demonstração e $h(t) = 0$ por hipótese. Assim

$$0 = h'(0) = 2L(\Gamma) \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} L(\Gamma_t(f)) - 4\pi \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} A(\Omega_t(f)).$$

Usando as fórmulas de variação obtidas nos Lemas 9 e 10, podemos escrever

$$\int_0^l (2L(\Gamma)\kappa(s) - 4\pi) f(s)ds = 0$$

para toda função diferenciável $f : [0,l] \to \mathbb{R}$ satisfazendo $f(0) = f(l)$. Escolhendo

$$f(s) = 2L(\Gamma)\kappa(s) - 4\pi,$$

onde $\kappa : [0,l] \to \mathbb{R}$ é a função curvatura de α, concluímos que

$$2L(\Gamma)\kappa(s) - 4\pi = 0 \quad \text{para todo} \quad s \in [0,l],$$

ou seja, a função curvatura $\kappa : [0,l] \to \mathbb{R}$ é tal que $\kappa \equiv 2\pi/L(\Gamma)$. Segue da proposição 7 que Γ é uma circunferência.

$\square$

5 Sobre o caso tridimensional da desigualdade isoperimétrica

Conforme foi citado na introdução deste trabalho, os resultados aqui apresentados podem ser estendidos para superfícies em $\mathbb{R}^3$. Neste caso, a desigualdade isoperimétrica é dada pelo

Teorema 12 (Desigualdade isoperimétrica espacial)**.** *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta e conexa de área $A(S)$ e delimitando uma região Ω. Se $V(\Omega)$ é o volume de Ω, então*

$$A(S)^3 - 36\pi V(\Omega)^2 \geq 0.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, S é uma esfera.

A demonstração completa do Teorema 12 pode ser encontrada em MONTIEL e ROS, e segue a mesma linha apresentada neste trabalho com as devidas adaptações. Neste contexto, a desigualdade de Brunn-Minkowski é aplicada no caso $n = 3$ e as fórmulas de variação são estendidas para a variação da área da superfície S e para a variação do volume da região delimitada por S. Aqui, a curvatura média da superfície desempenha o papel da curvatura no caso de curvas planas.

Seguindo o mesmo caminho do caso bidimensional, é possível mostrar que as superfícies que verificam a igualdade no Teorema 12 são aquelas que têm curvatura média constante. Neste ponto, podemos aplicar o Teorema de Alexandrov que afirma que, se uma superfície compacta e conexa tem curvatura média constante, então esta superfície tem que ser a esfera.

Referências

ALENCAR, H.; SANTOS, W.; NETO, G. Geometria diferencial das curvas no $\mathbb{R}^2$. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020. ISBN 978-65-990395-4-6.

ANTON, H.; RORRES, C. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BLÅSJÖ, V. The Isoperimetric Problem. The American Mathematical Monthly, v. 112, ed. 6, p. 526-566, 2005.

MONTIEL, S.; ROS, A. Curves and surfaces. 2nd. ed. American Mathematical Soc., 2009. v. 69.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. Real analysis: Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces. New Jersey: Princeton University Press, 2005. v. 3.

TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. Editora Blucher, 2008.

VIRGÍLIO, P. Eneida: Tradução de Manoel Odorico Mendes. Clássicos Jackson, 1854. v. 3.